
ALTENCOA5-2012

ÁLgebra, TEoría de Números,
COmbinatoria y Aplicaciones

Diciembre 3-7 2012, Bogotá, Colombia

Una Dualidad para el Algebra de la
Lógica Condicional

Fernando Guzmán

12/05/12

REFERENCES

*

- [1] F. Guzmán and C. C. Squier, *The algebra of conditional logic*, Algebra Universalis **27** (1990), no. 1, 88–110. MR1025838 (90m:03107)

- [2] D. M. Clark and B. A. Davey, *Natural dualities for the working algebraist*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 57, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998. MR1663208 (2000d:18001)

- [3] G. Kucinski, *Duality for the algebra of conditional logic*, Ph.D. Dissertation, Binghamton University, 2010

Evaluación de corto-circuito

$$P \wedge Q$$

Lógica condicional de tres valores de verdad

$$C = \{T, F, U\}$$

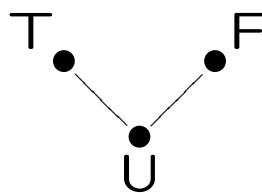
\wedge	T	F	U
T	T	F	U
F	F	F	F
U	U	U	U

\vee	T	F	U
T	T	T	T
F	T	F	U
U	U	U	U

	'
T	F
F	T
U	U

C como espacio topológico estructurado

- $C = \{T, F, U\}$
- Topología Discreta
- Orden parcial de *más definido*



Para un álgebra $A \in \mathcal{C}$, el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ como subespacio de C^A , está en la categoría \mathcal{P} .

Dado $P \in \mathcal{P}$, el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{P}}(P, C)$ es una subálgebra de C^P , y está en la categoría \mathcal{C} .

$$\begin{array}{rcccl}
 E, D : & \mathcal{C} & \rightleftharpoons & \mathcal{P} & \\
 & A & \mapsto & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) & \\
 & \text{Hom}_{\mathcal{P}}(P, C) & \leftarrow & P &
 \end{array}$$

Teorema 1 (3). *Los funtores D y E , descritos arriba, establecen una dualidad entre las categorías \mathcal{C} y \mathcal{P} . Más exactamente,*

- *dado $P \in \mathcal{P}$, $P \approx ED(P)$, via la función de evaluación*

$$ev : P \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Hom}_{\mathcal{P}}(P, C), C)$$

$$x \mapsto \begin{cases} ev_x : \text{Hom}_{\mathcal{P}}(P, C) \rightarrow C \\ \varphi \mapsto \varphi(x), \end{cases}$$

- *dado $A \in \mathcal{C}$, A se sumerje en $DE(A)$, via la función de evaluación*

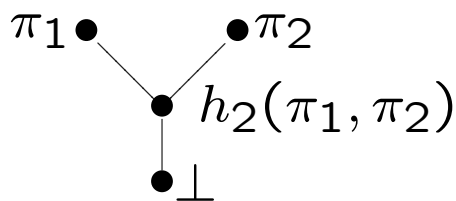
$$ev : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), C)$$

$$a \mapsto \begin{cases} ev_a : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \rightarrow C \\ \psi \mapsto \psi(a). \end{cases}$$

Exite $A_7 \in \mathcal{C}$ con $|A_7| = 7$ y $|DE(A_7)| = 11$.

Ejemplo 2. $A_7 = \{UU, UT, UF, TU, FU, TT, FF\}$ is a subalgebra of \mathcal{C}^2 .

$$P = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_7, \mathcal{C}) = \{\perp, \pi_1 \wedge \pi_2, \pi_1, \pi_2\}$$



$$\begin{array}{l}
 \pi_1 \\
 \pi_2 \\
 h_2(\pi_1, \pi_2) \\
 \perp
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccccc}
 U & U & U & F & T & F & T \\
 U & T & F & U & U & F & T \\
 U & U & U & U & U & F & T \\
 U & U & U & U & U & U & U
 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc}
 T & T & F & F \\
 T & F & T & F \\
 U & U & U & U \\
 U & U & U & U
 \end{array} \right.$$

Estructura adicional en los espacios topológicos

$$h_n : C^n \rightarrow C$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} U & \text{si algún } x_i = U \\ T & \text{si todo } x_i = T \\ F & \text{si todo } x_i = F \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = \langle C, \leq, (h_n | n \in \mathbb{N}), \tau \rangle$$

donde τ es la topología discreta.

$$\mathcal{P} = IS_cP(\mathbf{C})$$

Con este nuevo \mathcal{P} , aún tenemos

$$E(A) \in \mathcal{P}, \text{ para cada } A \in \mathcal{C},$$

y

$$D(P) \in \mathcal{C}, \text{ para cada } P \in \mathcal{P}.$$

Teorema 3. *Los funtores D y E , descritos arriba, establecen una equivalencia dual entre las categorías \mathcal{C} y \mathcal{P} . Más exactamente,*

- *dato $P \in \mathcal{P}$, $P \approx ED(P)$, via la función de evaluación,*
- *dato $A \in \mathcal{C}$, $A \approx DE(A)$, via la función de evaluación.*

Lema 4. Sea $P \in \mathcal{P}$ y $\psi : P \rightarrow C$. Si ψ preserva h_2 entonces preserva el orden parcial.

Prueba.

$$\text{dom}(h_2) = \{UU, UT, UF, TU, FU, TT, FF\}$$

$h_2(a, b) = \min(a, b)$, para cualquier $(a, b) \in \text{dom}(h_2)$.

$P \subseteq C^I$. Supongamos que $x, y \in P$ son tales que $x \leq y$.

$$x_i \leq y_i \text{ para todo } i \in I$$

$$(x_i, y_i) \in \text{dom}(h_2), \text{ con } h_2(x_i, y_i) = x_i$$

$$h_2(x, y) = x$$

Como ψ preserva la operación parcial h_2

$$(\psi(x), \psi(y)) \in \text{dom}(h_2) \text{ y}$$

$$h_2(\psi(x), \psi(y)) = \psi(h_2(x, y)) = \psi(x)$$

ó sea $\psi(x) \leq \psi(y)$. □