XIX Coloquio Latinoamericano de Algebra

Special Session on Algebra and Logic

December 11-14 2012, Pucón, Chile

Natural Duality for Conditional Logic

Fernando Guzmán

12/12/12

REFERENCES

*

[1] F. Guzmán and C. C. Squier, *The algebra of conditional logic*, Algebra Universalis **27** (1990), no. 1, 88–110. MR1025838 (90m:03107)

[2] D. M. Clark and B. A. Davey, *Natural dualities for the working algebraist*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 57, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998. MR1663208 (2000d:18001)

[3] G. Kucinski, *Duality for the algebra of conditional logic*, Ph.D. Dissertation, Binghamton University, 2010

Evaluación de corto-circuito

$$P \wedge Q$$

Lógica condidicional de tres valores de verdad

$$C = \{T, F, U\}$$

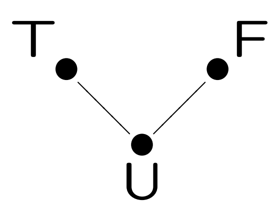
$\wedge$	T	F	U
T	T	F	U
F	F	F	F
U	U	U	U

$\vee$	T	F	U
T	T	T	T
F	T	F	U
U	U	U	U

	'
T	F
F	T
U	U

C como espacio topológico estructurado

- $C = \{\mathtt{T},\mathtt{F},\mathtt{U}\}$
- Topología Discreta
- Orden parcial de *más definido*



Para un álgebra $A \in \mathcal{C}$, el conjunto $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ como subespacio de C^A, está en la categoría $\mathcal{P}$.

Dado $P \in \mathcal{P}$, el conjunto $\mathsf{Hom}_{\mathcal{P}}(P, C)$ es una subalgebra de C^P, y está en la categoría $\mathcal{C}$.

$$\begin{array}{llcc} E, D: & \mathcal{C} & \leftrightharpoons & \mathcal{P} \\ & A & \mapsto & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ & \mathsf{Hom}_{\mathcal{P}}(P, C) & \leftarrow\!\shortmid & P \end{array}$$

Teorema 1 (3). *Los funtores D y E, descritos arriba, establecen una dualidad entre las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$. Más exactamente,*

- *dado $P \in \mathcal{P}$, $P \approx ED(P)$, via la función de evaluación*

$$\begin{array}{rrcl} ev: & P & \to & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Hom}_{\mathcal{P}}(P,C),C) \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rrcl} ev_x: & \mathsf{Hom}_{\mathcal{P}}(P,C) & \to & C \\ & \varphi & \mapsto & \varphi(x), \end{array} \right. \end{array}$$

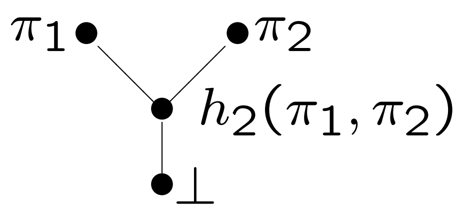
- *dado $A \in \mathcal{C}$, A se sumerje en $DE(A)$, via la función de evaluación*

$$\begin{array}{rrcl} ev: & A & \to & \mathsf{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C),C) \\ & a & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rrcl} ev_a: & \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) & \to & C \\ & \psi & \mapsto & \psi(a). \end{array} \right. \end{array}$$

Exite $A_7 \in \mathcal{C}$ con $|A_7| = 7$ y $|DE(A_7)| = 11$.

Ejemplo 2. $A_7 = \{UU, UT, UF, TU, FU, TT, FF\}$ *is a subalgebra of* C^2.

$$P = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_7, C) = \{\perp, \pi_1 \wedge \pi_2, \pi_1, \pi_2\}$$



π_1	U	U	U	F	T	F	T	T	T	F	F
π_2	U	T	F	U	U	F	T	T	F	T	F
$h_2(\pi_1, \pi_2)$	U	U	U	U	U	F	T	U	U	U	U
$\perp$	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U

Estructura adicional en los espacios topológicos

$$
\begin{array}{rccl}
h_n: & C^n & \to & C \\
& (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \begin{cases} U & \text{si algún } x_i = U \\ T & \text{si todo } x_i = T \\ F & \text{si todo } x_i = F \end{cases}
\end{array}
$$

$$\mathbf{C} = \langle C, \leq, (h_n | n \in \mathbb{N}), \tau \rangle$$

donde τ es la topología discreta.

$$\mathcal{P} = IS_cP(\mathbf{C})$$

Con este nuevo $\mathcal{P}$, aún tenemos

$$E(A) \in \mathcal{P}, \text{ para cada } A \in \mathcal{C},$$

y

$$D(P) \in \mathcal{C}, \text{ para cada } P \in \mathcal{P}.$$

Teorema 3. *Los funtores* D *y* E*, descritos arriba, establecen una equivalencia dual entre las categorías* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{P}$*. Más exactamente,*

- *dado* $P \in \mathcal{P}$, $P \approx ED(P)$, *via la función de evaluación,*

- *dado* $A \in \mathcal{C}$, $A \approx DE(A)$, *via la función de evaluación.*

Lema 4. *Sea $P \in \mathcal{P}$ y $\psi : P \to C$. Si ψ preserva h_2 entonces preserva el orden parcial.*

Prueba.

$$\text{dom}(h_2) = \{UU, UT, UF, TU, FU, TT, FF\}$$

$h_2(a, b) = \min(a, b)$, para cualquier $(a, b) \in \text{dom}(h_2)$.

$P \subseteq C^I$. Supongamos que $x, y \in P$ son tales que $x \leq y$.

$$x_i \leq y_i \quad \text{para todo} \quad i \in I$$

$$(x_i, y_i) \in \text{dom}(h_2), \text{ con } \quad h_2(x_i, y_i) = x_i$$

$$h_2(x, y) = x$$

Como ψ preserva la operación parcial h_2

$$(\psi(x), \psi(y)) \in \text{dom}(h_2) \quad \text{y}$$

$$h_2(\psi(x), \psi(y)) = \psi(h_2(x, y)) = \psi(x)$$

ó sea $\psi(x) \leq \psi(y)$. □